



TITLE:

非対称直角距離を用いた配置問題 について(連続と離散の最適化数理)

AUTHOR(S):

金, 正道; 久志本, 茂

CITATION:

金, 正道 ...[et al]. 非対称直角距離を用いた配置問題について(連続と離散の最適化数理). 数理解析研究所講究録 1997, 981: 85-88

ISSUE DATE:

1997-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60893>

RIGHT:

非対称直角距離を用いた配置問題について

金沢大・自然科学 金 正道

金沢大・教育 久志本 茂

1. はじめに

平面において $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^2, i = 1, 2, \dots, n (\geq 2)$ を相異なる需要点とし、 $d(\cdot, \cdot)$ を距離を表す関数とし、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を新たに配置する施設の位置を表わす変数としたとき通常、単一施設配置問題は次のように定式化される。

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2} F(\mathbf{x}) = G(d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1), \dots, d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_n)) \quad (1)$$

目的関数は、配置する施設の種類によって異なり、よく用いられるものとしては次の 3 つがある。 $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ を需要点 \mathbf{a}_i に付随する重みとし、 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ とする。

Minisum Problem(MSP)

$$F_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \quad (2)$$

Minimax Problem(MMP)

$$F_2(\mathbf{x}) = \max\{w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) : i = 1, 2, \dots, n\} \quad (3)$$

Multicriteria Problem(MCP)

$$F_3(\mathbf{x}) = (d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1), \dots, d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_n)) \quad (4)$$

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して $\nexists \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ s.t. $d(\mathbf{y}, \mathbf{a}_i) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i), i = 1, 2, \dots, n$ かつ $d(\mathbf{y}, \mathbf{a}_j) < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j)$ for some j であるとき \mathbf{x} を efficient point といい、efficient points の集合を $E(A)$ で表す。efficient point \mathbf{x} に対して $\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ s.t. $d(\mathbf{y}, \mathbf{a}_i) = d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i), i = 1, 2, \dots, n$ であるとき \mathbf{x} を alternately efficient point といい、alternately efficient points の集合を $AE(A)$ で表す。efficient point \mathbf{x} が alternately efficient point でないとき、 \mathbf{x} を strictly efficient point といい、strictly efficient points の集合を $SE(A)$ で表す。また、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して $\nexists \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ s.t. $d(\mathbf{y}, \mathbf{a}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i), i = 1, 2, \dots, n$ であるとき \mathbf{x} を quasiefficient point といい、quasiefficient points の集合を $QE(A)$ で表す。定義より明らかに $A \subset SE(A) \subset E(A) \subset QE(A)$ が成り立つ。MCP の最適解としては efficient point または quasiefficient point を考える。

2. ファジィ配置問題

2点 $\mathbf{x} = (x, y), \mathbf{y} = (x', y')$ 間の非対称直角距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を次のように定義する [1,4]。

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_1(x) + d_2(y) \quad (5)$$

ここで

$$d_1(x) = \begin{cases} E|x - x'| & x \geq x' \\ W|x - x'| & x < x' \end{cases} \quad (6)$$

$$d_2(y) = \begin{cases} N|y - y'| & y \geq y' \\ S|y - y'| & y < y' \end{cases} \quad (7)$$

であり、 E, W, S, N はそれぞれ東西南北方向に対して付与された正の重みである。定義より各 \mathbf{y} に対して $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は \mathbf{x} に関して凸関数である。非対称直角距離を用いた MSP, MMP は [1] によって解法が提案されている。

次に、非対称直角距離を用いた MMP に、ファジィ概念を導入した問題を考える。満足度が最も小さい需要点での満足度を最大にする配置を求める maximin 型施設配置問題として、この問題を次のように定式化する [4]。

Fuzzy Maximin Problem(FMMP)

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2} \min \{ \mu_i(w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)) : i = 1, 2, \dots, n \}$$

ここで、 $\mu_i(w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i))$ は重み付けされた距離 $w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)$ に対する満足度を表すメンバーシップ関数で次のように定義される (図 1)。

$$\mu_i(w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) < L_i \\ f(w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)) & \text{if } L_i \leq w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) < L_i + e_i \\ 0 & \text{if } w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \geq L_i + e_i \end{cases} \quad (8)$$

ここで L_i, e_i は正数で、 $f(w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i))$ は次のような単調減少関数である。

$$f(w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)) = 1 - \frac{1}{e_i} \{ w_i d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) - L_i \} \quad (9)$$

FMMP は [4] によって解法が提案されている。

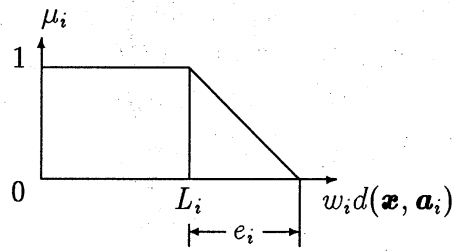


図 1 メンバーシップ関数

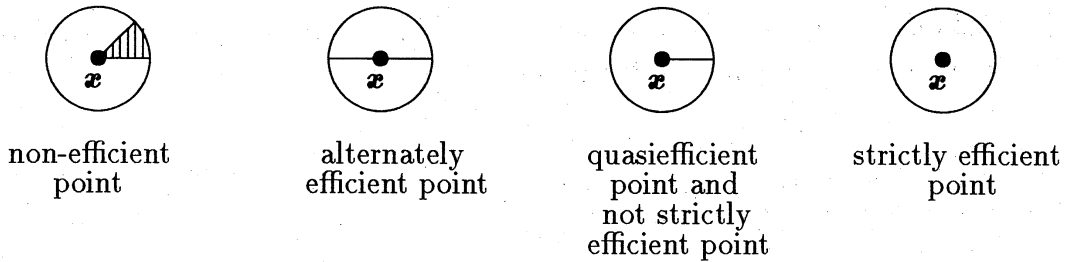
3. efficiency の特徴づけ

efficiency に対して次のような性質がある。quasiefficient point でない点を non-efficient point とよぶ。また、 $N'(0, \frac{1}{N})$, $E'(\frac{1}{E}, 0)$, $S'(0, -\frac{1}{S})$, $W'(-\frac{1}{W}, 0)$ とする。

[性質] ([4])

1. $N'E' \setminus W'S'$, $N'W' \setminus E'S'$ の場合、alternately efficient point および quasiefficient point であって efficient point でない点は存在しない。
2. 対称距離の場合の strictly efficient point は非対称距離の場合でも strictly efficient point となる。
3. 対称距離の場合の non-efficient point は、非対称距離の場合でも non-efficient point である。
4. 各方向に対する重み (N, E, S, W) が変化するとそれにつれて $E(A)$, $QE(A)$ も変化する。

$x \in \mathbf{R}^2$ に対して x が strictly efficient point, alternately efficient point, quasiefficient point であるかどうかは $Dx = \bigcap_{i=1}^n \{y \in \mathbf{R}^2 \mid d(y, a_i) \leq d(x, a_i)\}$ を x の近傍 Bx で調べることによってわかる (図 2)。

図 2 $Dx \cap Bx$

非対称直角距離を用いた $E(A), QE(A)$ を求める解法は [4] によって提案されている。

次に efficient points と MSP, MMP, FMMP の最適解との関係を考える。一般に、 $\mathbf{x}^* \in QE(A)$ であるための必要十分条件は \mathbf{x}^* が、ある $w_1 = \cdots = w_n = 0$ ではない重み $w_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$ に対しての MSP の最適解となることであることが知られている。いまの場合、次の定理が示される。

定理 1

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \in E(A) \\ \iff \\ \exists w_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n \\ \text{s.t. } \mathbf{x}^* \text{ が } w_1, w_2, \cdots, w_n \text{ を重みとする} \\ \text{MSP の最適解} \end{aligned}$$

S^* を MMP の最適解の集合とすると S^* は有界であり、次の補題が成り立つ。

補題 1 S^* は 1 点かまたは 1 つの線分になる。

一般に、MMP の最適解は quasiefficient point であることが知られている。いまの場合、次の定理が示される。

定理 2 MMP の最適解であり efficient point でもあるような点が存在する。

系 1 FMMP の最適値を t^* としたとき FMMP の最適解に関して次が成り立つ。

1. $0 < t^* < 1$ のとき最適解は quasiefficient point であり、最適解であり efficient point でもあるような点が存在する。
2. $t^* = 1$ のとき最適解は quasiefficient point である場合も quasiefficient point でない場合もあるが、最適解であり、efficient point でもあるような点が存在する。

参考文献

- [1] Z.Drezner and G.O.Wesolowsky, "The Asymmetric Distance Location Problem", Transportation Science, Vol.23, No.3, 1989, pp.201-207
- [2] 久志本茂, "最適化問題の基礎, 森北出版, 1979
- [3] T.J.Lowe, T.-F.Thisse, J.E.Ward and R.E.Wendell, "On Efficient Solutions to Multiple Objective Mathematical Programs", Managemanet Science, Vol.30, 1984, 1346-1349
- [4] 松富達夫, 石井博昭, "ファジィ概念を用いた非対称距離施設配置問題", 日本ファジィ学会誌, Vol.8, No.1, 1996, pp.57-64
- [5] B.Pelegrin and F.R.Fernandez, "Determination of Efficient Points in Multiple-Objective Location Problems", Naval Research Logistics., Vol.35, 1988, pp.697-705